Tentamen Metrische Ruimten, 2002

16 oktober 2002

Dit tentamen bestaat uit een multiple choice gedeelte I en een een take-home gedeelte II. Een goed resultaat van deel I is noodzakelijke voorwaarde voor een beoordeling van deel II. Deel I moet voor 10:00 uur (16 oktober) ingeleverd worden, deel II op 30 oktober.

Deel I: Naam: Studentnummer:

Neem A een deelverzameling van een metrische ruimte (V, ρ). Schrijf bij de begrippen 1.-9. de letter van de meest preciese definitie beneden.

1. rijcompact ( ) 2. uniform continu ( ) 3. randpunt ( )
4. contractie ( ) 5. dekpunt ( ) 6. dicht ( )
7. begrensd ( ) 8. volledig ( ) 9. continu ( )

(a) $\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in V\ \exists \delta > 0 \rho(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \delta$.
(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in V\ \rho(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in V\ \rho(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \delta$.
(d) $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
(e) $\exists \varepsilon > 0 \exists x \in V\ A \subset B(x; \varepsilon)$.
(f) $\exists \varepsilon > 0\ B(x; \varepsilon) \cap A = \{x\}$.
(g) $\partial A^c = \partial A$.
(h) $\overline{A} = V$.
(i) $\forall \varepsilon > 0 B(x; \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
(j) $\forall x, y \in V \exists c < 1\ \rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x,y)$.
(k) $\exists c < 1\ \forall x, y \in V\ \rho(f(x), f(y)) < c\rho(x,y)$.
(l) $f(x) \leq x$.
(m) $f(x) = x$.
(n) U open $\Rightarrow f(U)$ open.
(o) U open $\Rightarrow f^{-1}(U)$ open.
(p) $x \in \overline{A} \setminus \overline{A^c}$.
(q) $\exists \varepsilon > 0 f(x) \in \partial B(x; \varepsilon)$.
(r) Elke convergente rij is Cauchy.
(s) Elke Cauchy rij is convergent.
(t) Elke rij heeft een convergente deelrij.
(u) Elke rij heeft een Cauchy deelrij.
(v) $\overline{A} = A$.
(w) $\partial A \neq \emptyset$.
(x) $x \in \overline{A}$.

Tentamen Metrische Ruimten, 2002

16 oktober 2002

Deel II: in te leveren: 30 oktober 2002, in postvak H. Bruin

Opgave 1: Definiëer een topologie $\mathcal{O}$ op $\mathbb{R}$ door te zeggen: $U \in \mathcal{O}$ als $U = \emptyset$ of als $\mathbb{R} \setminus U$ een eindige verzameling is. Dit is de zogenaamde *co-eindige* topologie.
a) Controleer dat $\mathcal{O}$ inderdaad een topologie is.
b) Laat zien dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.
c) Toon aan dat alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ compact zijn in deze topologie.

Opgave 2: Neem $C^k([0,\pi]) = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is } k \text{ maal continu differentieerbaar.}\}$ met $\|f\|_k = \max_{i=0,\dots,k} \sup_{x\in[0,\pi]} |D^i f(x)|$ de gebruikelijke C^k-norm. Laat $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin nx$ zijn.
a) Toon aan dat de puntsgewijze limiet f van f_n bestaat. Behoort f tot $C^0([0,\pi])$ resp. $C^1([0,\pi])$?
b) Convergeert f_n naar f in C^0 resp. C^1-norm?
c) Toon aan dat $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ bestaat. Is de convergentie is C^0-norm, in C^1-norm of geen van beide?
d) Is $F(x) \in C^1([0,\pi])$?

Opgave 3: Laat P de verzameling van alle polynomen $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ zijn. Neem $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2}x \pmod 1$, dus $f(\frac{2}{3}) = 0$.
a) Bestaat er een rij $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})$ die puntsgewijs naar f convergeert? Verklaar je antwoord (idem bij de overige onderdelen).
b) Bestaat er een rij $(p_n) \subset P$ die uniform naar f convergeert?
c) Bestaat er een rij $(p_n) \subset P$ die puntsgewijs naar f convergeert?
d) Bestaat er een rij $(p_n) \subset P$ die naar f convergeert in de L^1-norm?

Opgave 4: Laat V een topologische ruimte zijn, en $A \subsetneq V$. Neem aan dat er een continue afbeelding $\varphi : [0,1] \to V$ bestaat zodat $\varphi(0) \in V$ en $\varphi(1) \in V \setminus A$.
a) Toon aan dat er een $t \in [0,1]$ bestaat met $\varphi(t) \in \partial A$.
b) Laat zien dat $\overline{\varphi((1/3, 2/3))} = \varphi([1/3, 2/3])$.
c) Toon aan dat A en $V \setminus A$ niet tegelijkertijd compact kunnen zijn.